IPR – INSTITUT DE PRODUCTION & ROBOTIQUE
LABORATOIRE DE PRODUCTION MICROTECHNIQUE (LPM)
Thomas Maeder
CH-1015 LAUSANNE, Switzerland
☎: + 41 21 693 58 23
Fax : + 41 21 693 38 91
thomas.maeder@epfl.ch
http://ipr.epfl.ch

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

2003-05-07 fréquence propre mécanique
MilliNewton.docx

Calcul de la fréquence de résonance de MilliNewton

Estimation théorique de la fréquence de résonance du capteur de force MilliNewton.

Thomas Maeder, 7.5.2003

Projet: MilliNewton

Mots-Clefs: MilliNewton, capteur de force, cantilever, résonance.

Table des matières

Résumé

Ce document donne un calcul approximatif de la fréquence de résonance de MilliNewton – et sert de base pour le calcul d'autres capteurs de type cantilever.
Les fréquences propres des capteurs MilliNewton sont élevées, en raison de la très petite taille de la poutre.

1. Vibration d'un cantilever simple

1.1. Solution analytique

D'après Whitney[i] et Strässler[ii], les fréquences de résonance d'un cantilever de section constante sont données par :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E^* \cdot I}{\rho \cdot S}} \cdot \left(\frac{z_i}{L}\right)^2 \qquad (1)$$

f_i	fréquence du mode i
E^*	module élastique effectif
I	moment d'inertie (en flexion) de la section
ρ	masse volumique de la poutre
S	section
z_i	constante du mode i
L	longueur libre de la poutre

Les valeurs approximatives de z_i sont données au tableau 1 ci-dessous.

i	z_i	***i***	z_i
1	1.8751	4	10.9955
2	4.6941	5	14.1372
3	7.8546	6	17.2786

Tableau 1. Constantes z_i des modes de résonance d'un cantilever.

Pour une poutre de section rectangulaire b x h, avec $b >> h$, on a :

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad (2)$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad (3)$$

$$S = b \cdot h \qquad (4)$$

E	module de Young
ν	coefficient de Poisson
b	largeur de la poutre
h	épaisseur de la poutre

En combinant (1)–(4), on obtient finalement :

$$f_i = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2) \cdot \rho}} \cdot h \cdot \left(\frac{z_i}{L}\right)^2 \qquad (5)$$

En général, on s'intéresse au 1[er] mode, qui limite en pratique la fréquence de travail du capteur. Dans ce cas :

$$f_1 \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2) \cdot \rho}} \cdot \frac{h}{L^2} \qquad (6)$$

1.2. Solution masse - ressort

On cherche à exprimer la solution ci-dessus en termes d'un système masse-ressort, afin de pouvoir ultérieurement approximer l'effet de l'adjonction d'une masse supplémentaire. Pour une masse m suspendue à un ressort sans masse de rigidité k, la fréquence de résonance f s'écrit :

(7) $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m^*}}$	f fréquence de résonance k constante de rigidité du ressort m^* masse "effective" (voir ci-dessous)

Or, pour un cantilever, où la force est appliquée au point $x \leq L$:

(8) $m_c = \rho \cdot S \cdot L$ (9) $k = 3\frac{E^* \cdot I}{x^3}$	m_c masse du cantilever x point d'application de la force

Pour un cantilever de section rectangulaire b x h avec $b >> h$ – voir (2)-(4) :

(10) $m_c = \rho \cdot b \cdot h \cdot L$ (11) $k = \frac{E \cdot b \cdot h^3}{4x^3}$ (12) $m^* = u \cdot m_c$	u coefficient masse réelle - équivalente

Si on écrit la fréquence d'après (6) :

(13) $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\cdot\rho}} \cdot \frac{h}{\sqrt{u \cdot x^3 \cdot L}} \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\cdot\rho}} \cdot \frac{h}{L^2}$$

(14) $$u \cong 0.24267 \cdot \frac{L^3}{x^3}$$

1.3. Adjonction d'une masse sur la poutre

Si on ajoute une masse *m*' au point *x* de la poutre, on obtient :

$$(15) \quad f' \cong \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{u \cdot m_c + m'}}$$

$$(16) \quad f' \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right) \cdot \rho}} \cdot \frac{h}{L^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m' \cdot x^3}{0.24267 \cdot \rho \cdot b \cdot h \cdot L^4}}}$$

2. Application à MilliNewton

Les paramètres de MilliNewton sont donnés au tableau 2 ci-dessous.

Symbole	Description	400 mN	1'000 mN	2'000 mN	unité
b	largeur	3.0	3.0	3.0	mm
h	épaisseur	0.25	0.40	0.635	mm
x	pos. bille	8.0	8.0	8.0	mm
L	longueur libre	9.3	9.3	9.3	mm
ρ	densité Al_2O_3	3.9	3.9	3.9	mg/mm^3
m'	masse (bille)	4.1	4.1	4.1	mg
k	rigidité	7.6	30.9	124	N/mm
f	résonance (sans bille)	4.30	6.87	10.91	kHz
f'	résonance (avec bille)	3.64	6.16	10.16	kHz

En réalité, l'encastrement de MilliNewton est imparfait. Les fréquences de résonance seront donc un peu plus faibles en pratique.

---

[i] Whitney-S, "Vibrations of cantilever beams: deflection, frequency and research uses", University of Nebraska - Lincoln (UNL) , 1999.

[ii] Strässler-S Ryser-P, "Project VIVIGLUS (mechanical)", EPFL-LPM, 2003.